المجلة العراقية للعلوم الإحصائية (29) 2019
عدد خاص بالمؤتمر الطلابي الاول
ص ص [1-10]

تقدير بيز الحصين لدالة الموثوقية لتوزيع ويبل المبتور مع التطبيق على مرضى قرحة المعدة

د.بان غانم عمر العاني* د. ضوية سلمان حسن** د. ريا سالم الرسام***
Ban_alani2012@yahoo.com Dhwyiai salman@yahoo.com Rayasalim73@gmail.com

المستخلص:

تم في هذا البحث تقدير دالة الموثوقية بأسلوب بيز الحصين باستخدام التوزيع الاولي للمعلمة θ ذو الصنف (الملوث ML–II–ε) عندما تكون معلمة الشكل β معلومة وتحت دالة الخسارة التربيعية لمدة بقاء مرضى قرحة المعدة منذ تشخيص المرض واخذ العلاج ولحين الشفاء ومغادرة المستشفى او الوفاة اذ تم بتر الوقت منذ دخول المريض لحين تشحيص المرض واخذ العلاج وتبين ان البيانات تتوزع توزيع ويبل ذو المعلمتين (θ,β) حيث ان التوزيع الاولي لمعلمة القياس يتوزع توزيع Fréchet ذي المعلمتين $(\alpha_0 =1, \sigma_0)$ حسب المعلومات الاولية من السنوات الاولية حول مدة بقاء المرضى بالمستشفى واخذ راي الاطباء والمختصين.

الكلمات المفتاحية: توزيع ويبل المبتور، توزيع Fréchet، بيز الحصين، الموثوقية، التوزيع الاولي ذو الصنف (الملوث ML–II–ε).

Estimation of Bayes Robustness for the Reliability Function for the Distribution Weibull Truncated with Application to Gastric Ulcer Patients

Abstract:

In this paper,the reliability function was estimation by the robust bayes approach using the initial distribution of the parameter θ with class (ML-II-ε-contaminated) when the shape parameter β is known and under the quadratic loss function for the duration of gastric ulcer patients since diagnosis and treatment until recovery and hospital discharge or death. The time of patient's admission to diagnosis and treatment was truncated. It was found that the data follow the two-parameter Weibul distribution (θ,β) where the prior

*مدرس/ قسم الاحصاء والمعلوماتية/ كلية الحاسوب والرياضيات/ جامعة الموصل
** استاذ/ قسم التكنلوجيا /كلية ادارة المعلوماتية
***استاذ مساعد/ قسم الاحصاء والمعلوماتية/ كلية الحاسوب والرياضيات/جامعة الموصل

تاريخ استلام البحث 2019/4/29 ـــــــــــــــــــــــــــ تأريخ القبول 2019 /7/3

distribution of the scale parameter was two-parameter Fréchet distribution (α_0=1,σ_0) according to prior information from previous years about the length of hospital stay and the opinions doctors and specialists.

هدف البحث:

تقدير دالة الموثوقية باسلوب بيز الحصين لمدة بقاء مرضى قرحة المعدة منذ تشخيص المرض واخذ العلاج ولحين الشفاء ومغادرة المستشفى او الوفاة اذ تم بتر الوقت منذ دخول المريض لحين تشحيص المرض واخذ العلاج

1− المقدمة:

ان اسلوب بيز الحصين يفترض عدم التاكد من تحديد التوزيع الاولي $\pi(\theta)$ ،لذلك ظهرت اصناف عدة للتوزيعات الاوليه لمعالجة هذه المشكلة ومن ضمن هذه الاصناف التي اهتم بها الباحثون والتي تعتبر اكثر شيوعا هو صنف (ع− الملوث) contamination class−ع الذي اعتمدنا عليه في بحثنا هذا والمعروف بالدالة الاتية (James & Berliner1986) :

$$\Gamma = \{\pi(\theta): \pi(\theta) = (1 - \varepsilon)\pi_0(\theta) + \varepsilon q(\theta), q \in Q\} \qquad \ldots(1)$$

وقد تناول العديد من الباحثين هذا الصنف في دراسات عديده منهم (Mark 1984) و (Anoop & Manaswini 2013) و (Pankaj & J. Prabha 2010) .

في هذا البحث سوف يتم تقدير دالة الموثوقية لتوزيع ويبل تحت داله الخساره التربيعية. وذلك باقتراح طريقه جديدة بتغير التوزيع الاولي لمعلمة القياس حيث ان التوزيع الاحتمالي للمعلومات الاولية هو توزيع Fréchet بالمعلمات (α_0 =1, σ_0)

1− التوزيع اللاحق لتوزيع ويبل المختلط المبتور:

تعرف دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع ويبل المبتور من طرف اليسار عند النقطة T ذي المعلمتين (θ ، β)، بالدالة الاحتمالية الآتية:

$$f_T(X|\theta, \beta) = \frac{\frac{\beta}{\theta} x^{\beta-1} \exp\left(-\frac{x^\beta}{\theta}\right)}{\exp\left(-\frac{T^\beta}{\theta}\right)} \qquad \ldots(2)$$

حيثان $T\leq X\leq \infty$ تشير β الى معلمة الشكل و θ تمثل معلمة القياس

ودالة الامكان

$$L\,(X;\theta,\beta)=\frac{\left(\frac{\beta}{\theta}\right)^{n}\prod_{i=1}^{n}x^{\beta-1}\exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\beta}}{\theta}\right)}{\exp\left(-\frac{T^{\beta}}{\theta}\right)^{n}} \qquad \ldots(3)$$

وبالاعتماد على الصنف (الملوث – ε) للتوزيع الاولي للمعلمة θ والمعرف بالمعادلة (1)

$$\Gamma=\{\pi(\theta):\pi(\theta)=(1-\varepsilon)q_0(\theta)+\varepsilon\, q(\theta)\}$$

$q_0(\theta)$: المعلومات الاساسية الاولية القياسية

$q(\theta)$:المعلومات الملوثة الاولية القياسية

حيث ان كل من $q_0(\theta)$ و $q(\theta)$ يتوزعان توزيع Fréchet وكالاتي:

$$q_{F0}(\theta|\sigma_0)=\frac{\sigma_0}{\theta^2}\exp\left(-\frac{\sigma_0}{\theta}\right) \qquad \theta,\sigma_0>0 \qquad \ldots(4)$$

$$q_F(\theta|\sigma)=\frac{\sigma}{\theta^2}\exp\left(-\frac{\sigma}{\theta}\right) \qquad \theta,\sigma>0 \qquad \ldots(5)$$

اما دالة الكثافة الحدية التي تقابل التوزيع الاحتمالي لـ x بوجود المعلومات الاولية الملوثة عن المعلمه θ فهي:

$$m_{FT}(X|q)=\int_0^{\infty}L(\theta|X,B)q_F(\theta|\sigma)\,d\theta$$

$$\therefore\ m_{FT}(X|q)=\beta^n\prod x^{\beta-1}\sigma\frac{\Gamma(n+1)}{\left(\sum x^{\beta}+\sigma-nT^{B}\right)^{n+1}} \qquad \ldots(6)$$

الان نعظم الدالة الحدية $m_{FT}(X|q)$ للحصول على مقدر جديد $\hat{\sigma}$

$$\frac{m_{FT}(X|q)}{\partial\sigma}=\beta^n\prod x^{\beta-1}\Gamma(n+1)\left[\frac{(\sum x^{\beta}+\sigma+nT^{B})^{n+1}-\sigma(n+1)(\sum x^{\beta}+\sigma-nT^{B})^{n}}{(\sum x^{\beta}+\sigma-nT^{B})^{2(n+1)}}\right]$$

باخراج عامل مشترك $\left(\sum x^{\beta}+\sigma-nT^{B}\right)^{n}$ ومساواة $\frac{m_{FT}(X|q)}{\partial\sigma}$ بالصفر نحصل على :

$$\therefore\ \hat{\sigma} = \frac{\sum x^{\beta} - nT^{B}}{n} \qquad \dots(7)$$

وعليه سوف نستبدل σ بـ $\hat{\sigma}$ في دالة التوزيع الاولي الملوث ل θ في المعادلة (5) نحصل على :

$$q_{FT}(\theta|\sigma) = \begin{cases} \frac{\sum x^{\beta} - nT^{B}}{n\theta^{2}} \exp\left(-\frac{\sum x^{\beta} - nT^{B}}{n\theta}\right) & \text{if } \sigma_0 < \hat{\sigma} \\ q_{FT0}(\theta|\sigma_0) & \text{if } \sigma_0 \geq \hat{\sigma} \end{cases} \qquad \dots(8)$$

وعليه سوف يكون التوزيع المختلط الاولي للمعلمة θ باستخدام مقدر الامكان الاعظم النوع الثاني كما يلي :

$$\hat{\pi}_{FT}(\theta) = (1-\varepsilon) q_{FT0}(\theta|\sigma_0) + \varepsilon\, q_{FT}(\theta|\hat{\sigma}) \qquad \dots(9)$$

اذن التوزيع اللاحق للمعلمة θ باستخدام مقدر الامكان الاعظم النوع الثاني يكتب حسب الصيغة الاتية:

$$\hat{\pi}^{*}{}_{FT}(\theta) = \hat{\lambda} q^{*}_{FT0}(\theta|\sigma_0) + \left(1-\hat{\lambda}\right) q^{*}{}_{TF}(\theta|\hat{\sigma}) \qquad 0 < \theta < \infty \qquad \dots(10)$$

وسيتم ايجاد الوزن اللاحق باستخدام مقدر الامكان الاعظم من النوع الثاني

$$\hat{\lambda}_{FT} = \frac{(1-\varepsilon) m_{FT}(X|q_0)}{(1-\varepsilon) m_{FT}(X|q_0) + \varepsilon\, m_{FT}(X|\hat{q})}$$

وبعد التبسيط نحصل على

$$\hat{\lambda}_{FT} = \begin{cases} \left[1 + \frac{\varepsilon\left(\sum x^{\beta} n^{-1} - T^{B}\right)\left(\sum x^{\beta} + \sigma_0 - nT^{B}\right)^{n+1}}{(1-\varepsilon)\ \sigma_0 \left[\sum x^{\beta} + \frac{\sum x^{\beta} - nT^{B}}{n} - nT^{B}\right]^{n+1}}\right]^{-1} & \text{if } \sigma_0 < \hat{\sigma} \\ (1-\varepsilon) & \text{if } \sigma_0 \geq \hat{\sigma} \end{cases} \qquad \dots(11)$$

ومن ثم يتم ايجاد التوزيع اللاحق للتوزيع الاساس $q^{*}{}_{FT0}(\theta|\sigma_0)$ للمعلمة θ

$$q^{*}_{FT0}(\theta|\sigma_0) = \frac{L(\theta) q_0(\theta|\sigma_0)}{m(X|q_0)}$$

$$\therefore\ q^{*}_{FT0}(\theta|\sigma_0)=\frac{(\sum x^{\beta}+\sigma_0-nT^{B})^{n+1}}{\Gamma(n+1)}\theta^{-(n+1+1)}\exp\left(-\frac{(\sum x^{\beta}+\sigma_0-nT^{\beta})}{\theta}\right)\quad \dots(12)$$

وتمثل الدالة الاحتماليه في المعادله (12) توزيع معكوس كاما بالمعلمتين $(\sum x^{\beta}+\sigma_0-nT^{B},n+1)$

وبنفس الطريقة يتم ايجاد التوزيع اللاحق للتوزيع الملوث وكما يلي

$$q^{*}_{FT}(\theta|\hat{\sigma})=\frac{(\sum x^{\beta}+\frac{\sum x^{\beta}-nT^{B}}{n}-nT^{B})^{n+1}}{\Gamma(n+1)}\theta^{-(n+1+1)}\exp\left(-\frac{(\sum x^{\beta}+\frac{\sum x^{\beta}-nT^{B}}{n}-nT^{\beta})}{\theta}\right)\quad \dots(13)$$

وتمثل الدالة الاحتماليه في المعادله (13) توزيع معكوس كاما بالمعلمتين $\left(\sum x^{\beta}+\frac{\sum x^{\beta}-nT^{B}}{n}-nT^{B},n+1\right)$

3- مقدر بيز الحصين لدالة الموثوقية تحت دالة الخسارة التربيعية:

مقدر بيز للمعلمة θ تحت دالة الخسارة التربيعية للتوزيع الاساس المبتور

$$Eq^{*}_{TF0}(\theta)=\int_0^{\infty}\theta\,\frac{(\sum x^{\beta}+\sigma_0-nT^{\beta})^{n+1}}{\Gamma(n+1)}\theta^{-(n+1+1)}\exp\left(-\frac{(\sum x^{\beta}+\sigma_0-nT^{\beta})}{\theta}\right)d\theta$$

$$\therefore\ Eq^{*}_{TF0}(\theta)=\frac{(\sum x^{\beta}+\sigma_0-nT^{\beta})}{n}$$

وبنفس الطريقة نجد مقدر بيز للمعلمة θ تحت دالة الخسارة التربيعية للتوزيع الملوث المبتور وكما يلي :

$$\hat{q}^{*}_{TF}(\theta)=\frac{(\sum x^{\beta}+\frac{\sum x^{\beta}-nT^{B}}{n}-nT^{\beta})}{n}$$

وعليه سيكون مقدر بيز للمعلمة θ للتوزيع اللاحق المختلط تحت دالة الخسارة التربيعية للطريقة المقترحة هو

$$\hat{\pi}^{*}{}_{TF}(\theta)=\left\{\begin{array}{ll}\frac{1}{n}\left[\hat{\lambda}(\sum x^{\beta}+\sigma_0-nT^{\beta})+(1-\hat{\lambda})(\sum x^{\beta}+\frac{\sum x^{\beta}-nT^{B}}{n}-nT^{\beta})\right] & \text{if } \sigma_0<\hat{\sigma}\\ \frac{1}{n}(\sum x^{\beta}+\sigma_0-nT^{\beta}) & \text{if } \sigma_0\geq\hat{\sigma}\end{array}\right\}\quad \dots(14)$$

دالة الموثوقية لتوزيع ويبل المبتور هي (Dallas 1989):

$$R(\mathrm{t}) = \exp\left(\frac{-(\mathrm{t}^{\beta} - T^{B})}{\theta}\right)$$

اما مقدر دالة الموثوقية للتوزيع اللاحق المختلط المبتور تحت دالة الخسارة التربيعية يمكن كتابته كما في المعادلة التالية:

$$\hat{R}^{*}{}_{FT}(\mathrm{t}) = \int_{0}^{\infty} \mathrm{R(t)}\, \hat{\pi}^{*}{}_{\mathrm{FT}}(\theta)\mathrm{d}\theta \qquad \ldots(15)$$

وبعد التعويض عن التوزيع اللاحق المختلط المبتور

$$\hat{\mathrm{R}}^{*}{}_{\mathrm{FT}}(\mathrm{t}) = \begin{cases} \hat{\mathrm{R}}_{\mathrm{FT0}} + \left(1 - \hat{\lambda}\right)\left[\hat{\mathrm{R}}_{\mathrm{FT}} - \hat{\mathrm{R}}_{\mathrm{FT0}}\right] & \text{if } \sigma_0 < \hat{\sigma} \\ \hat{\mathrm{R}}_{\mathrm{FT0}} & \text{if } \sigma_0 \geq \hat{\sigma} \end{cases} \qquad \ldots(16)$$

حيث ان :

$$\hat{\mathrm{R}}_{FT0} = \mathrm{Eq}^{*}_{\mathrm{FT0}}[\mathrm{R(t)}] = \int_{0}^{\infty} \exp\left(\frac{-(\mathrm{t}^{\beta} - T^{B})}{\theta}\right) \mathrm{q}^{*}_{\mathrm{FT0}}(\theta|\sigma_0)\mathrm{d}\theta$$

وهذه تمثل مقدر دالة الموثوقية للتوزيع الاصلي المبتور تحت دالة الخسارة التربيعية وبعد التبسيط نحصل على:

$$\therefore\ \hat{\mathrm{R}}_{FT0} = \frac{\left(\sum \mathrm{x}^{\beta} + \sigma_0 - n\mathrm{T}^{\beta}\right)^{n+1}}{\left(\sum \mathrm{x}^{\beta} + \sigma_0 - n\mathrm{T}^{\beta} + \mathrm{t}^{\beta} - T^{B}\right)^{n+1}} \qquad \ldots(17)$$

كذلك نجد ان مقدر دالة الموثوقية للتوزيع الملوث المبتور تحت دالة الخسارة التربيعية بالشكل التالي:

$$\hat{\mathrm{R}}_{\mathrm{FT}} = \mathrm{Eq}^{*}{}_{\mathrm{FT}}[\mathrm{R(t)}] = \int_{0}^{\infty} \exp\left(\frac{-(\mathrm{t}^{\beta} - T^{B})}{\theta}\right) \mathrm{q}^{*}{}_{\mathrm{FT}}(\theta|\hat{\alpha})\mathrm{d}\theta$$

وبنفس الطريقة نجد مقدر دالة الموثوقية للتوزيع الملوث المبتور تحت دالة الخسارة التربيعية وبعد التبسيط نحصل على

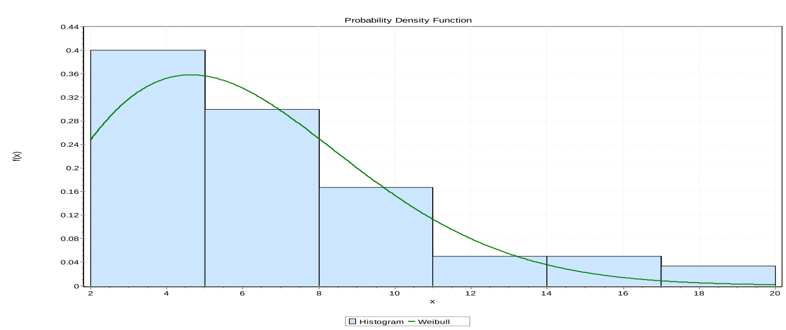
$$\therefore\ \hat{\mathrm{R}}_{FT} = \frac{\left(\sum \mathrm{x}^{\beta} + \frac{\sum \mathrm{x}^{\beta} - \mathrm{nT}^{B}}{\mathrm{n}} - n\mathrm{T}^{\beta}\right)^{n+1}}{\left(\sum \mathrm{x}^{\beta} + \frac{\sum \mathrm{x}^{\beta} - \mathrm{nT}^{B}}{\mathrm{n}} - n\mathrm{T}^{\beta} + \mathrm{t}^{\beta} - T^{B}\right)^{n+1}} \qquad \ldots(18)$$

وعليه يكون مقدر دالة الموثوقية للتوزيع اللاحق المختلط المبتور تحت دالة الخسارة التربيعية والناتج من التعويض في المعادلة (16)

$$\hat{R}^{*}_{FT}(t)=\frac{\left(\sum x^{\beta}+\sigma_0-nT^{\beta}\right)^{n+1}}{\left(\sum x^{\beta}+\sigma_0-nT^{\beta}+t^{\beta}-T^{B}\right)^{n+1}}+\left(1-\hat{\lambda}\right)\left[\frac{\left(\sum x^{\beta}+\frac{\sum x^{\beta}-nT^{B}}{n}-nT^{\beta}\right)^{n+1}}{\left(\sum x^{\beta}+\frac{\sum x^{\beta}-nT^{B}}{n}-nT^{\beta}+t^{\beta}-T^{B}\right)^{n+1}}-\frac{\left(\sum x^{\beta}+\sigma_0-nT^{\beta}\right)^{n+1}}{\left(\sum x^{\beta}+\sigma_0-nT^{\beta}+t^{\beta}-T^{B}\right)^{n+1}}\right] \quad \ldots(19)$$

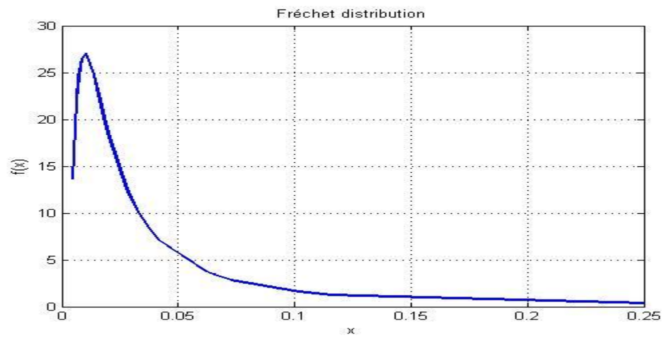
4-الجانب التطبيقي:

تم اخذ عينة عشوائية بحجم (n=30) مريض من السجلات الخاصة بالمرضى المصابين بمرض قرحة المعدة، من مستشفى رزكاري _ اربيل وتمثلت هذه البيانات بقياس مُدّة بقاء المرضى بالايام تحت العلاج لحين الوفاة او الشفاء ومغادرة المستشفى وقد اعتبرت مُدّة البقاء منذ بدء التشخيص واخذ العلاج ولحين المغادرة إذ تم بتر الوقت منذ دخول المريض لحين تشخيص المرض واخذ العلاج وقد أُجري على البيانات بعد بترها إختبار بواسطة برنامج (Easy Fit)، نتج عن الإختبار أنها تتبع توزيع ويبل بمعلمتين. ورُسمت دالة الكثافة الاحتمالية لاوقات البقاء للمرضى في المستشفى لحين المغادرة وذلك باستخدام البرنامج المذكور، ومن ملاحظة الشكل(1) يتبين أن مُدّة البقاء له دالة كثافة توزيع ويبل



شكل (1) توزيع ويبل لبيانات مُدّة البقاء لمرضى مصابين بقرحة المعدة في المستشفى منذ تشخيص المرض ولحين المغادرة

وعند اخذ المعلومات الاولية من السنوات الاولية حول مُدّة البقاء للمرضى في المستشفى واخذ راي الاطباء والمختصين واجراء اختبار باستخدام برنامج (Easy Fit) للبيانات الاولية نتج انها تتبع توزيع Fréchet. كما موضح بالشكل(2).



الشكل (2) التوزيع الاحتمالي لمعلمة القياس θ (توزيع فريجت) والذي يمثل معدل ايام البقاء في المستشفى

وتم عرض نتائج مقدرات بيز لدالة الموثوقية بالاعتماد على المعادلة رقم (19) لمُدّة بقاء مرضى المصابين بقرحة المعدة في المستشفى منذ تشخيص المرض واخذ العلاج ولحين المغادرة في ظل دالة الخسارة التربيعية في جدول باستخدام لغة ماتلاب (MATLAB). نحصل على النتائج في الجدول الاتي:

جدول (2) مقدرات دالة الموثوقية تحت دالة الخسارة التربيعية لمُدّة بقاء المرضى

i	X_i مُدَة بقاء المرضى في المستشفى بالايام	مقدر الموثوقية $\widehat{R}^*_{FT}(t)$
1	2	1.0000
2	2	1.0000
3	2	1.0000
4	3	1.0000
5	3	1.0000
6	3	1.0000
7	3	1.0000
8	4	0.9125
9	4	0.9125
10	4	0.9125
11	4	0.9125
12	5	0.9125
13	5	0.9125
14	6	0.9125
15	6	0.9125
16	6	0.9125
17	6	0.9125
18	6	0.9125
19	7	0.8029
20	7	0.8029
21	7	0.8029
22	9	0.8029
23	9	0.8029
24	9	0.8029
25	9	0.6813
26	10	0.6813
27	13	0.6813
28	14	0.6813
29	16	0.6813
30	20	0.6813

2- الاستنتاجات:

1- وجد ان التوزيع الاولي المقترح لمعلمة القياس θ هو توزيع Fréchet ذي المعلمتين ($\alpha_0 =1, \sigma_0$) في ظل البيانات الحقيقية الاولية التي تم جمعها من السجلات والمعلومات المتوافرة لدى الاطباء عن معلمة القياس لذلك اعتمدنا توزيع Fréchet كتوزيع مسبق مقترح للحصول على مقدرات بيز في ظل دالة خسارة التربيعية

2- وجد ان توزيع قيم المشاهدات (X_i) والتي تمثل اوقات البقاء لمرضى المصابين بقرحة المعدة منذ تشخيص المرض واخذ العلاج لحين المغادرة مقاسة بالايام تتبع توزيع ويبل المبتور من جهة اليسار عند القيمة (2)، وان قيمة البتر هذه تعتبر مؤشر مفيد للمستشفى لتحديد مُدّة تشحيص المرض والبدء باخذ العلاج.

3- من خلال الجدول (2) نلاحظ ان كلما زاد بقاء المريض في المستشفى قلت قيمة الموثوقية

المصادر

1. Anoop Chaturvedi · Manaswini Pati · Sanjeev K. Tomer(2013)” Robust Bayesian analysis ofWeibull failure model” METRON, DOI 10.1007/s40300-013-0027-7

2. Dallas R. Wingo(1989)” The left-truncated Weibull distribution theory and computation” Statistical Papers 30, 39-48

3. James Berger; L. Mark Berliner(1986)” Robust Bayes and Empirical Bayes Analysis with # -Contaminated Priors” *The Annals of Statistics*, Vol. 14, No. (Jun., 1986), pp. 461-486.

4. Mark Berliner (1984)” Robust Bayesian Analysis with Applications in Reliability” the Office of Naval Research under Contract N00014-84-k-0422.

5. Pankaj Sinha* and J. Prabha(2010)” Bayes Reliability Measures of Lognormal and Inverse Gaussian Distributions under ML-II e-contaminated Class of Prior Distributions” Defence Science Journal, Vol. 60, No. 4, July 2010, pp. 442-450